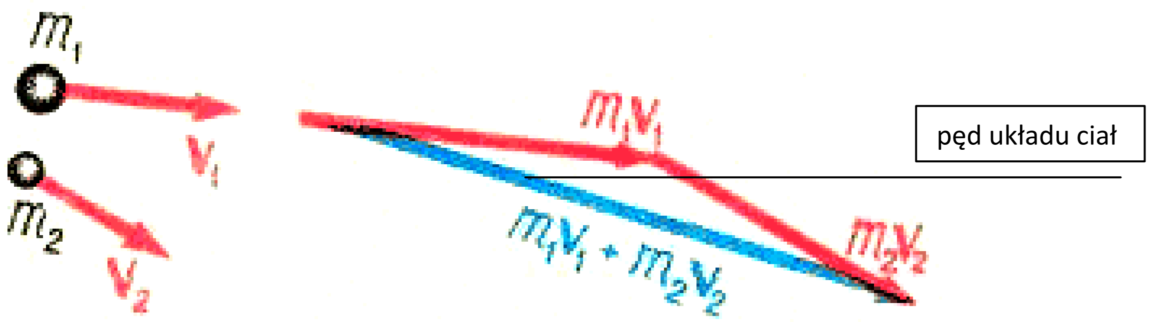
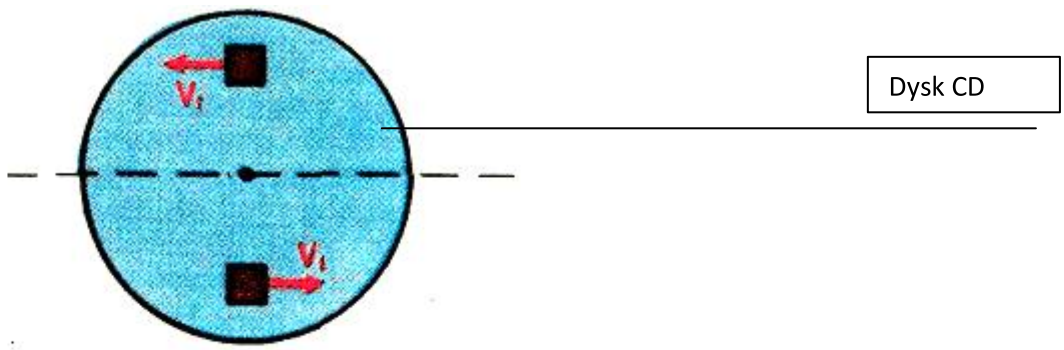
# A jak to właściwie jest z tą zasadą zachowania pędu ?

Pędem lub ilością ruchu punktu materialnego nazywamy iloczyn jego masy przez prędkość. Prędkość jest wektorem, a masa skalarem to oznacza, że pęd jest wektorem. Ponadto kierunek wektora pędu pokrywa się z kierunkiem wektora prędkości. W taki sposób podaje się w podręczniku definicję pędu jako wielkości fizycznej.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę więcej punktów materialnych lub cząstek, to możemy wówczas mówić o pędzie układu punktów materialnych. Wtedy pęd jest równy sumie wektorowej pędów wszystkich cząstek tworzących dany układ ciał. Aby lepiej zrozumieć istotę pędu układu ciał posłużymy się przykładem tylko dwóch punktów materialnych lub cząstek. Jedna z nich ma masę $m_1$ i prędkość $V_1$, a druga masę $m_2$ i prędkość $V_2$.

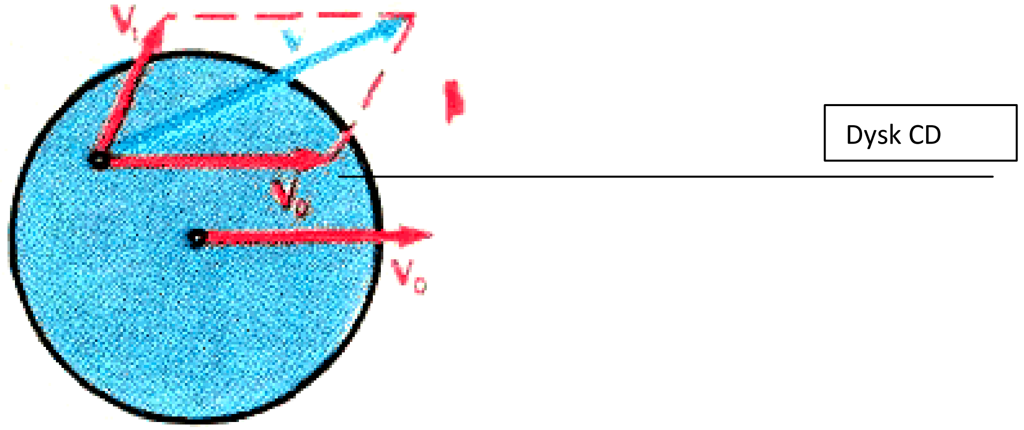



Cząstki $m_1$, $m_2$ stanowią układ ciał. Pęd tego układu ciał jest sumą wektorową pędów poszczególnych ciał. Na rysunku przedstawiono kolorem niebieskim kierunek i zwrot wektora pędu układu ciał i jego kierunek. Trzeba pamiętać o tym, że pędy cząstek dodajemy wektorowo korzystając chociażby z prostej reguły dodawania wektorów zwanej regułą trójkąta lub reguły równoległoboku. Jeżeli jednak pędy lub prędkości cząstek skierowane są wzdłuż jednej prostej to możemy zastosować najzwyklejsze dodawanie algebraiczne. W tym przypadku pędy cząstek poruszających się w przeciwne strony należy wybierać z przeciwnymi znakami. Aby znaleźć pęd danego ciała, w którym różne jego punkty mają różne prędkości należy w myślach rozłożyć to ciało na małe (nieskończenie ) kawałki, a następnie złożyć pędy tych kawałeczków. Jako zastosowanie tego pomysłu rozważmy pęd dla jednorodnego dysku np. CD obracającego się wokół osi obrotu.




Ireneusz Mańkowski ILO w Lęborku 28 grudnia 2010

Znajdziemy dla tego dysku zawsze dwa takie elementy o masach $\Delta m$, których prędkości liniowe mają jednakową wartość, lecz są przeciwnie zwrócone. Oczywistym jest, że suma pędów dla tak wybranego układu elementów jest równa zero. Z tego można wywnioskować, że cały dysk ma pęd zerowy, bo zawsze znajdziemy pary takich elementów masy jak przedstawionych powyżej. A jak to będzie wyglądało kiedy dysk poruszać się będzie ruchem postępowym(obracając się) po horyzontalnej powierzchni ? Sytuację przedstawia rysunek




Prędkość środka masy dysku jest równa $V_0$. Prędkość dowolnego elementu masy $\Delta m$ można przedstawić, jako sumę jego prędkości liniowej związanej z jego obrotem względem środka masy w układzie odniesienia związanym z jego środkiem masy i prędkości $V_0$ jego ruchu postępowego tzn.

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_0}$$

Pęd całego dysku jest równy sumie oddzielnych jego elementów, czyli

$$\vec{p} = \sum \Delta m\vec{V} = \sum \Delta m\vec{V_1} + \sum \Delta m\vec{V_0}$$

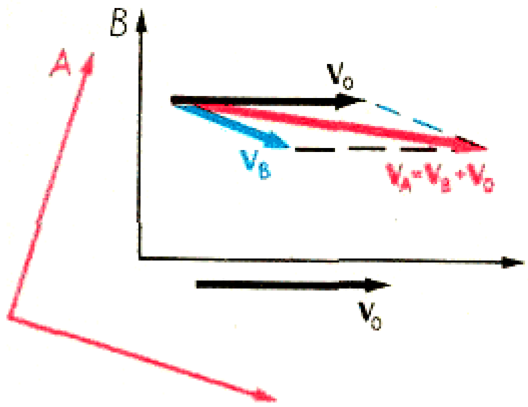
Pierwszy składnik tej sumy odpowiada pędowi dysku w układzie odniesienia związanym z jego środkiem masy. W układzie tym środek masy pozostaje nieruchomy i pęd jest równy zero. Drugi składnik sumy odpowiada pędowi dysku względem horyzontalnej powierzchni. Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\vec{p} = \sum \Delta m\vec{V}_0 = \vec{V}_0 \sum \Delta m = M\,\vec{V}_0$$

Gdzie M to masa całkowita dysku

Łatwo stąd zauważyć, że pęd danego ciała zależy od układu odniesienia względem którego to ciało się porusza. Aby to lepiej zilustrować rozważmy kolejny przykład.

Niech w układzie odniesienia B ciało o masie m porusza się z prędkością $\vec{V}_{\mathbf{B}}$. Jego pęd wynosi wtedy $\mathbf{p_1} = \mathbf{m}\vec{V}_{\mathbf{B}}$. Układ współrzędnych B (układ odniesienia) porusza się względem układu A z prędkością $\vec{V}_0$ jak pokazuje rysunek




Jeżeli chcemy znaleźć pęd ciała w układzie odniesienia A to musimy pomnożyć masę tego ciała przez jego prędkość względem tego właśnie układu. Prędkość ciała względem układu przedstawiona jest na rysunku jako suma wektorowa prędkości $\vec{V}_0$ i $\vec{V}_{\mathbf{B}}$. Wykorzystując ten fakt dostajemy

$$m\vec{\boldsymbol{V}}_{A} = m\vec{\boldsymbol{V}}_{B} + m\vec{\boldsymbol{V}}_{0} = \vec{\boldsymbol{p}}_{1} + m\vec{\boldsymbol{V}}_{0}$$

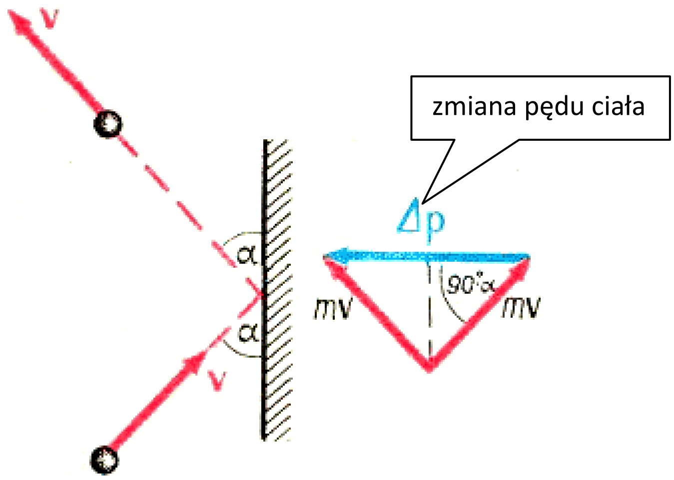
Wykorzystując pojęcie pędu II zasadę dynamiki Newtona można zapisać następująco:

$$\vec{F} = m\vec{\boldsymbol{a}} = m\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{V}}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{\boldsymbol{V}})}{\Delta t}$$

Jeżeli więc na ciało działa siła w odstępie czasowym $\Delta t$ to pęd ciała zmienia się zgodnie z wyrażeniem

$$\Delta(m\vec{V}) = \vec{\boldsymbol{F}}\Delta t$$

Iloczyn siły **F** i czasu $\Delta t$ nazywamy impulsem siły. Mówimy także, że zmiana pędu ciała równa jest impulsowi działającej na to ciało siły. Można to wykorzystać na przykład podczas znajdowania średniej siły działającej na ścianę, kiedy w ścianę uderza jakieś ciało o masie m kula lub piłka zderzając się ze ścianą sprężyście. Na rysunku przedstawiono tę sytuację




Prędkość nadlatującego ciała zarówno przed jak i po odbiciu jest taka sama co do wartości jedynie ulega zmianie jej kierunek. Czas zderzenia ciała ze ścianą jest dostatecznie krótki. Ze względu na sprężystość zderzenia ciało odbite zostaje pod takim samym kątem pod jakim padało na ścianę. Wektor zmiany pędu(niebieska strzałka) pokazuje zmianę pędu wynikającą z odbicia ciała od ściany. Można zmianę tego pędu wyliczyć korzystając z równania

$$2mVcos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2mVsina$$

Kierunek zmiany pędu zderzającego ze ścianą ciała jest prostopadły do ściany (niebieski wektor). To oznacza, że przy zderzeniu ciała ze ścianą działa na ciało działa średnia siła wyrażona wzorem

$$F = \frac{2mVsina}{\tau}$$

Gdzie $\tau$ oznacza czas zderzenia ciała ze ścianą.

Zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona siła takiej samej wartości działa na ścianę, lecz zwrot tej siły jest przeciwny. Jeżeli jedna siła działa na dwa ciała w tym samym czasie to oznacza, że pędy tych ciał zmieniają się jednakowo niezależnie od ich początkowych mas lub prędkości.

A co się będzie działo z zasadą zachowania pędu w przypadku kiedy na układ ciał działa siła zewnętrzna ? Taki układ nie będzie już układem izolowanym. Wiadomo jest, że pęd układu nie pozostaje wówczas zachowany. Zachowana zostaje tylko składowa pędu w kierunku prostopadłym do działającej siły. Składowa ta nie zmieni pędu całego układu.

W celu zrozumienia tej zasady rozważmy dwa charakterystyczne przykłady.

Przykład 1

Na platformie kolejowej poruszającej się z prędkością V znajduje się działo. Kierunek lufy działa zwrócony jest w stronę ruchu platformy. Z działa wystrzelono pocisk do przodu w wyniku czego prędkość platformy z zamocowanym na niej działem zmniejszyła się n razy. Znajdźmy prędkość U wystrzelonego pocisku (względem ziemi), jeżeli pocisk wylatuje pod kątem $\alpha$ do poziomu. Masa wystrzelonego pocisku m, a masa platformy z działem M.

Pomysł rozwiązania zadania wykorzystuje zasadę zachowania pędu w układzie ciał.
Na układ ciał składają się działo, platforma, pocisk. Układ ten nie jest jednak układem izolowanym bo działa na niego siła ciężkości i siła reakcji ziemi. Jednakże w kierunku poziomym na platformę i umieszczone na niej działo nie działają żadne siły zewnętrzne, co pozwala zastosować szczególny przypadek zasady zachowania pędu. To oznacza, że pozioma składowa pędu układu ciał nie zmienia się podczas wystrzału. Dlatego zasada zachowania pędu wygląda następująco:

$$mUcosa + M\frac{V}{n} = (m + M)V$$

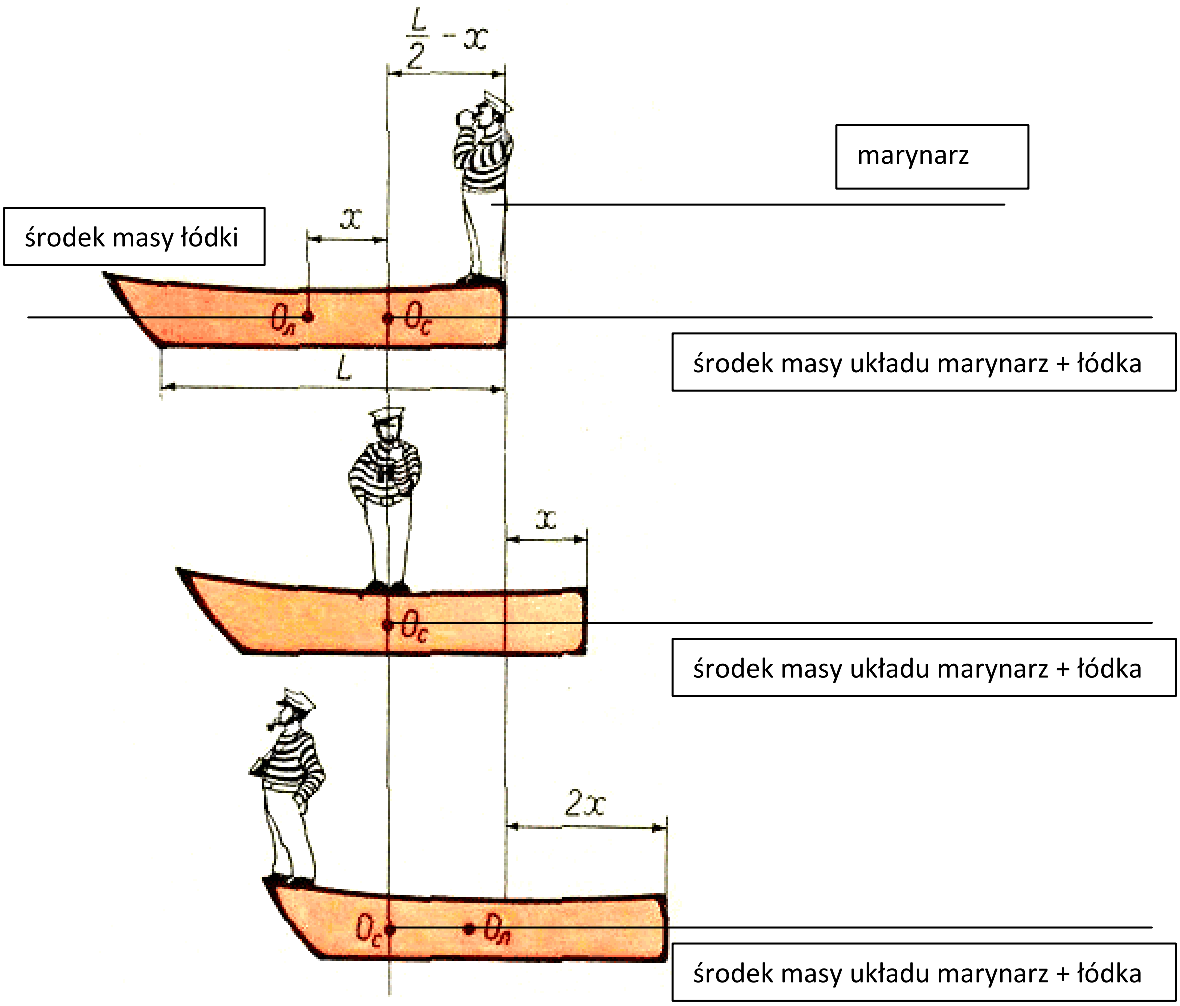
A stąd znajdujemy prędkość wystrzelonego pocisku

$$U = V\frac{m + M\frac{n-1}{n}}{mcosa}$$

Jeśli układ ciał jest izolowany i jego pęd nie ulega zmianie to nie zmienia się prędkość środka masy układu (patrz rozważania z dyskiem CD). W szczególności jeśli w dowolnym momencie układ ciał poruszał się tak, że prędkość środka masy była równa zero, to ta prędkość będzie równa zero przez cały czas. Dlatego nie ulega zmianie położenie środka masy układu. W celu zastosowania tej prawidłowości rozważmy drugi przykład

<u>Przykład 2</u>

Marynarz o masie m znajduje się na jednym końcu nieruchomej łódki o masie M. Długość łódki wynosi L. O jaki odcinek przesunie się łódka względem brzegu kiedy marynarz przejdzie na drugi koniec tej łódki ?




W kierunku poziomym na układ ciał marynarz + łódka nie działają żadne siły zewnętrzne oznacza to, że położenie środka masy układu nie ulega zmianie. Opisuje to punkt $O_c$

przedstawiony na rysunku. Na położenie środka masy układu marynarz + łódka składa się położenie środków mas łódki i marynarza. Na początku odległość pomiędzy środkiem masy dla układu a środkiem masy samej łódki wynosi na przykład x. Wówczas możemy zapisać następujący warunek:

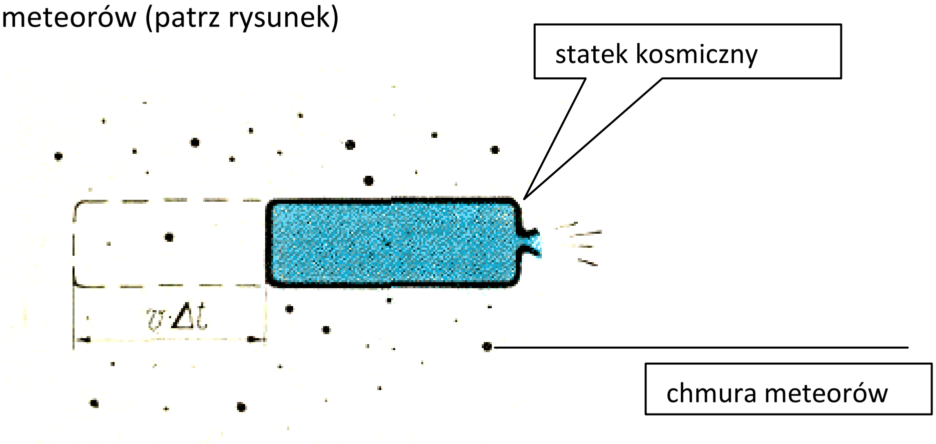
$Mx = m(\frac{L}{2} - x)$- równanie dla środka masy układu

$$x = \frac{m}{2(M+m)}L$$

Jeżeli marynarz przejdzie z jednego końca łódki na drugi to oczywiście położenie jego środka masy powinno się pokrywać z położeniem środka masy całego układu. Położenie środka masy łódki także powinno pokrywać się z położeniem środka masy układu to znaczy łódka powinna się przesunąć na odległość x. Łatwo stąd wywnioskować, że podczas przejścia marynarza na drugi koniec łódka względem brzegu przesunie się na odległość 2x. Dlatego pełne przesunięcie łódki względem brzegu wynosi

$$l = 2x = \frac{m}{M+m}L$$

No a teraz pora na zastosowania techniczne zasady zachowania pędu. Ten przypadek wykorzystania tej zasady nie jest już taki prosty jak rozważane wcześniej. Sytuacja którą rozważymy na sam koniec związana jest z pojazdem kosmicznym znajdującym się w chmurze meteorów (patrz rysunek)




Pojazd porusza się na przykład z prędkością v = 72 km/h (dosyć małą) w obszarze meteorów o gęstości $n=1/m^3$ tzn. w jednym metrze sześciennym przestrzeni znajduje się jeden meteor. Masa każdego z meteorów nie jest duża i wynosi 20 gram. O jaką wartość musi wzrosnąć siła ciągu silnika statku, aby nie uległa zmianie jego prędkość ? Dla ułatwienia możemy przyjąć, że zderzenia meteorów ze statkiem mają charakter zderzeń niesprężystych

W danym momencie statek zderza się z meteorytami, które w chwili początkowej znajdują się od niego w odległości $v\Delta t$. Masa wszystkich meteorów równa jest wtedy $mnSv\Delta t$. Należy zauważyć, że do zderzenia ze statkiem prędkości i pędy meteorów były równe zero. Po zderzeniu niesprężystym ze statkiem prędkości meteorów stały się równe v. To oznacza nic innego, ale tylko to, że przy zderzeniu meteora ze statkiem meteory uzyskują pęd równy mv. Meteory uderzające w statek w czasie Δt uzyskują sumaryczny pęd

$$Mv = mnSv\Delta t \cdot v = mnSv^2\Delta t$$

To oznacza, że na meteory działa siła F o wartości

$$F = \frac{Mv}{\Delta t} = mnSv^2$$

Zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona siła o takiej samej wartości ale zwrócona w przeciwną stronę działa na statek. Dlatego właśnie należy zwiększyć siłę ciągu o taką wartość, aby prędkość statku nie uległa zmianie w obłoku meteorów. Zakładając, że S jest równe w przybliżeniu około 50 $m^2$ możemy w prosty sposób policzyć wartość tej dodatkowej siły ciągu niezbędnej do zachowania stałości prędkości statku. Podstawienie wartości do wzoru na F daje wartość w przybliżeniu równą $10^5$ N.

W artykule opisano tylko niektóre, może najważniejsze kwestie związane z pędem i zasadą zachowania pędu. Pozostaje do wyjaśnienia jeszcze na przykład ruch rakiety wyrzucającej produkty spalania wielokrotnie, ale to już jest temat do kolejnego artykułu.

Ireneusz Mańkowski ILO w Lęborku 28 grudnia 2010