Model rakiety wykorzystujący zasadę zachowania pędu, czyli jeszcze trochę o zachowaniu pędu układu ciał

W przypadku napędu rakietowego struga gazu wyrzucana do tyłu niesie ze sobą pęd. Zgodnie z zasadą zachowania pędu pęd ten powinien być równy pędowi uzyskanemu przez rakietę. Każdy produkt spalania wyrzucany do tyłu powoduje zmianę pędu pozostałej części rakiety. Problem, który chciałbym rozważyć dotyczy właśnie rakiety.
Załóżmy, że chcemy wiedzieć, ile może wynosić prędkość rakiety po wyrzuceniu wielu porcji spalonego paliwa ? Powinniśmy założyć, że masa rakiety przed wyrzuceniem pierwszej porcji spalonego paliwa jest dana. Ponadto dla uproszczenia naszego modelu załóżmy, że za każdym razem z rakiety wyrzucana zostaje taka sama porcja masy. Masa tej porcji zawsze niech porusza się z jednakową prędkością względem rakiety. I to już wszystko, aby można było zbadać powyższy model ruchu naszej rakiety. Jeszcze możemy dla ułatwienia zaniedbać siłę ciężkości.

No to do dzieła. Najpierw wprowadźmy określone oznaczenia niezbędne do dalszych rozważań. Przyjmijmy, że nasza rakieta ma masę M to znaczy jest to początkowa jej masa przed wyrzuceniem spalonego paliwa. Masę wyrzuconej porcji oznaczmy przez m i przyjmijmy, że masa ta porusza się zawsze względem rakiety z prędkością $\vec{u}$. Pozostaje zastosować zasadę zachowania pędu w kolejnych przypadkach związanych z wyrzucaniem masy

Niech $\overrightarrow{v_1}$ to prędkość rakiety względem Ziemi, jeżeli wyrzucona została pierwsza porcja spalonego gazu. Zgodnie z zasadą zachowania pędu

$$(M-m)\overrightarrow{v_1} + m(\vec{u} + \overrightarrow{v_1}) = 0$$

W równaniu tym suma wektorów $(\vec{u} + \overrightarrow{v_1})$ to nic innego jak prędkość pierwszej porcji wyrzuconego gazu względem Ziemi w momencie rozdzielenia naszego układu rakieta-gaz, kiedy rakieta uzyskuje prędkość $\overrightarrow{v_1}$. Z tego równania wyznaczamy prędkość rakiety po pierwszym wyrzuceniu spalonego paliwa o masie m

$$\overrightarrow{v_1} = -\frac{m}{M}\vec{u}$$

Już tę pierwszą prędkość mamy wyznaczoną. Spróbujmy wyznaczyć prędkość po wyrzuceniu drugiej porcji masy m. Podobnie jak w pierwszym przypadku zastosujemy zasadę zachowania pędu.

Wiemy już, że rakieta przed wyrzuceniem drugiej porcji masy porusza się z prędkością $\overrightarrow{v_1}$ zaś przed wyrzuceniem drugiej porcji masy jest nieruchoma, a po wyrzuceniu jej prędkość wyniesie np. $\overrightarrow{v_2}'$

Korzystając z wcześniej wyprowadzonego wzoru wystarczy zauważyć, że możemy zamienić masę duże M przez M-m, a $\overrightarrow{v_1}$ na $\overrightarrow{v_2}'$ dostajemy

$$\overrightarrow{v_2}' = -\frac{m}{M-m}\vec{u}$$

Dlatego prędkość rakiety po wyrzuceniu drugiej porcji masy względem Ziemi będzie powiększona o prędkość tej wyrzuconej porcji masy. Uzyskamy następujące wyrażenia dla rakiety po wyrzuceniu dopiero drugiej części masy m

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2}' + \overrightarrow{v_1} = -m\vec{u}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{M-m}\right)$$

Uzyskaliśmy wzór, który w naszym modelu rakiety wystarcza na obliczenie prędkości, jaką uzyskuje lecąca rakieta względem Ziemi po zaledwie drugim wyrzuceniu określonej porcji masy spalonego paliwa. Co zrobić, aby uzyskać odpowiedź na pytanie. Jaka będzie prędkość tej rakiety po wyrzuceniu wielu takich porcji ? Jak widać wzór ten powinniśmy zmienić w taki sposób, aby spełniał nasze wymagania i uwzględniał wyrzucenie wielu porcji o jednakowej masie. Załóżmy, że tych porcji jest skończona ilość i oznaczmy ilość tych porcji przez n. Wówczas dostajemy po n wyrzuconych masach następujące wyrażenie na prędkość jaką uzyska rakieta względem Ziemi

$$\overrightarrow{v_n} = -m\vec{u}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m} + \ldots + \frac{1}{M-(n-1)m}\right)$$

Równanie to ma charakter wektorowy, ale to nie szkodzi, bo w łatwy sposób uzyskamy wartość prędkości dla naszej rakiety po ostatnim wyrzuceniu masy. W tym celu przyjmujemy kierunek ruchu rakiety w prawo jako dodatni (patrz rysunek) i wtedy dostajemy wzór

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{mu}{M-km}$$

Gdzie k jest wskaźnikiem sumy związanym z kolejnymi wyrzucanymi masami

Suma we wzorze jest związana z powiększaniem wartości prędkości naszej rakiety po wyrzucaniu kolejnych porcji spalonego gazu. Model nasz można rozszerzyć na przypadek rakiety już lecącej wcześniej ze stałą prędkością V. Wówczas prędkość naszej rakiety będzie oczywiście wynosiła

$$v_n = V + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{mu}{M-km}$$

$$v_n = V + mu\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m} + \ldots + \frac{1}{M-(n-1)m}\right)$$

Pozostaje jeszcze rozważyć przypadek, w którym wyrzucona zostaje cała masa spalonego paliwa za pierwszym razem z taką samą prędkością $\vec{u}$ jak każda z wcześniejszych wyrzucanych mas. Nie będziemy zajmować się postacią wektorową, ale znajdziemy wartość prędkości po wyrzuceniu tej masy całkowitej za pierwszym razem. Wykorzystamy fakt, że rakieta poruszała się wcześniej ze stałą prędkością V względem Ziemi. Korzystamy w tym celu z zapisania zasady zachowania pędu dla układu ciał

$$MV = (M - nm)v_n' + nm(V - u)$$

A stąd znajdujemy szukaną prędkość v_n' - prędkość rakiety po wyrzuceniu masy całkowitej

$$v_n' = V + \frac{nmu}{M - nm}$$

Łatwo jest zauważyć, że $v_n' > v_n$. Ten wynik związany jest z założeniem, że prędkość wyrzutu spalonych gazów z rakiety względem nieruchomego układu odniesienia(Ziemi) jest równa V-u.
W rzeczywistości prędkość wyrzutu paliwa ulega zmniejszeniu(stała prędkość wyrzutu paliwa względem rakiety). Bardziej realnie opisuje ruch rakiety wyrażenie na prędkość v_n